ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΥΧΗΣ - ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ – ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα τύχης λέγεται κάθε διαδικασία η οποία μπορεί να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.

Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης και συμβολίζεται με το γράμμα Ω. Επομένως αν ω_1, ω_2, …, ω_ν είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο:

$$\Omega = \omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_\nu\ .$$

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης λέγεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

- Ένα ενδεχόμενο λέγεται **απλό** όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και **σύνθετο** όταν έχει περισσότερα από ένα στοιχεία.
- Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου A, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο A **πραγματοποιείται** ή **συμβαίνει**. Για το λόγο αυτό τα στοιχεία του ενδεχομένου A λέγονται **ευνοϊκές περιπτώσεις** για την πραγματοποίησή του.
- Ο δειγματικός χώρος Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω λέγονται **δυνατές περιπτώσεις.**
- Το κενό σύνολο λέγεται **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A συμβολίζεται με $N\ A$.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

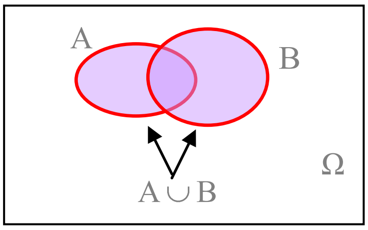
Σε ένα πείραμα τύχης τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω, οπότε:

- Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το **βασικό σύνολο** ή **σύνολο αναφοράς**.

- Οι πράξεις μεταξύ συνόλων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο τώρα λέγονται πράξεις μεταξύ ενδεχομένων.

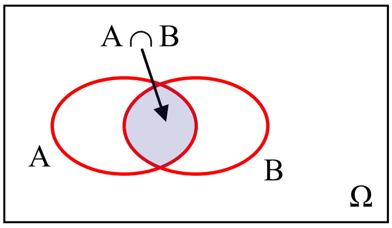
Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα, τότε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A', $A - B$ είναι επίσης ενδεχόμενα, αφού είναι και αυτά υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω.

Είναι φανερό ότι:

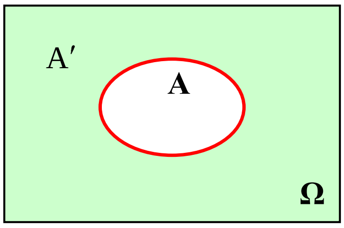


1. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A ή το ενδεχόμενο B. Δηλαδή όταν πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα A, B.

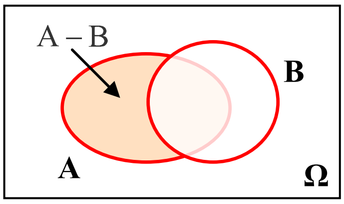
2. Το ενδεχόμενο $A \cap B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A και το ενδεχόμενο B. Δηλαδή όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα ενδεχόμενα A, B.



3. Το ενδεχόμενο A' πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A.



4. Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A και δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο B.



Παρατήρηση

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(i) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$

(ii) $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$

(iii) $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$

(iv) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

(v) $A \cup \; B \cup \Gamma \; = \; A \cup B \; \cup \Gamma$, $A \cap \; B \cap \Gamma \; = \; A \cap B \; \cap \Gamma$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

(vi) $A \cup \; B \cap \Gamma \; = \; A \cup B \; \cap \; A \cup \Gamma$, $A \cap \; B \cup \Gamma \; = \; A \cap B \; \cup \; A \cap \Gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα)

(vii) $A'\,' = \varnothing$

(viii) $A \cap A' = \varnothing$, $A \cup A' = \Omega$

(ix) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$

(x) Αν $A \subseteq B$ τότε $B' \subseteq A'$ και αντίστροφα

(xi) Αν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$, $A \cup B = B$

(xii) Αν A και B είναι ξένα ενδεχόμενα, τότε $A \subseteq B'$ και $B \subseteq A'$

(xiii) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

(xiv) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

(xv) $A \cup B\;' = A' \cap B'$, $A \cap B\;' = A' \cup B'$ τύποι του De Morgan

(xvi) $A - B = A \cap B'$.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Α. ΚΛΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ (Laplace 1812)

Γενικά όλα τα απλά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω λέμε ότι είναι **ισοπίθανα** όταν έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να πραγματοποιηθούν.

Ορισμός

Έστω ότι ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης περιέχει πεπερασμένο πλήθος **ισοπίθανων** αποτελεσμάτων. Πιθανότητα ενός ενδεχομένου A ορίζεται ο αριθμός:

$$P\ A = \frac{\text{πλήθος } \textbf{ευνοϊκών} \text{ περιπτώσεων}}{\text{πλήθος } \textbf{δυνατών} \text{ περιπτώσεων}} = \frac{N\ A}{N\ \Omega}$$

Παρατήρηση

Όταν από τον δειγματικό χώρο Ω **η επιλογή των στοιχείων γίνεται στην τύχη**, τότε θα εννοείται ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι **ισοπίθανα**.

Β. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Για να ισχύει ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας πρέπει:

- ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης να περιέχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων
- όλα τα απλά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα

Υπάρχουν πειράματα τύχης στα οποία ο δειγματικό χώρος Ω περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων ή τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Θα δώσουμε λοιπόν έναν γενικότερο ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α βασιζόμενοι στην έννοια της σχετικής συχνότητας, και ο οποίος βασίζεται σε πολλές επαναλήψεις του πειράματος τύχης.

Σχετική συχνότητα ενδεχομένου

Ορισμός

Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο. Αν σε $\boldsymbol{\nu}$ επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται $\boldsymbol{\kappa}$ φορές, τότε ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ λέγεται **σχετική συχνότητα** του A και συμβολίζεται με f_A, δηλαδή

$$\mathbf{f_A = \frac{\kappa}{\nu}}.$$

Αν ο δειγματικός χώρος είναι το πεπερασμένο σύνολο $\Omega = \ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_\mu \ , \mu \in \mathbb{N}^*$ και σε ν επαναλήψεις ενός πειράματος τύχης τα απλά ενδεχόμενα ω_1 , ω_2 , …,

ω_μ πραγματοποιούνται κ_1, κ_2, … , κ_μ φορές αντίστοιχα, τότε η σχετικές τους συχνότητες f_1, f_2, …, f_μ είναι $f_1 = \frac{\kappa_1}{\nu}$, $f_2 = \frac{\kappa_2}{\nu}$, …, $f_\mu = \frac{\kappa_\mu}{\nu}$ και **ισχύουν**:

- $\mathbf{0 \le f_i \le 1}$ **για κάθε** $\mathbf{i = 1, 2, \ldots, \mu}$
- $\mathbf{f_1 + f_2 + \cdots + f_\mu = 1}$

Ο νόμος των μεγάλων αριθμών

Αποδεικνύεται ότι: « **για ¨πολύ¨ μεγάλο αριθμό επαναλήψεων ενός πειράματος τύχης η σχετική συχνότητα κάθε ενδεχομένου προσεγγίζει όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό** ». Το συμπέρασμα αυτό λέγεται **στατιστική ομαλότητα** ή **νόμος των μεγάλων αριθμών**.

Στατιστικός ορισμός της πιθανότητας (Von Mises 1920)

Ορισμός

Έστω Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο. **Πιθανότητα** $P(A)$ του ενδεχομένου A ορίζεται ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζει η σχετική συχνότητα του A σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών.

Από τους προηγούμενους ορισμούς της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A προκύπτει άμεσα ότι:

1. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \le P(A) \le 1$.

2. $P(\Omega) = 1$

3. Αν A, B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τότε ισχύει:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Παρατήρηση

Αν $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $P(\omega_i)$ η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, τότε:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_\nu) = 1$
- Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\} \ne \varnothing$ είναι ένα ενδεχόμενο, τότε
  $P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \cdots + P(\alpha_\nu)$.

Δ. ΚΑΝΟΝΕΣ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Θεώρημα 1 (Απλός προσθετικός νόμος)

Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

Θεώρημα 2 (Προσθετικός νόμος)

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Θεώρημα 3

Για οποιαδήποτε συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A')=1-P(A).$$

Θεώρημα 4

Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $A\subseteq B$, τότε

$$P(A)\leq P(B).$$

Θεώρημα 5

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρείς φορές

(i) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

(ii) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: Οι τρεις ενδείξεις είναι ίδιες.
Β: Μια το πολύ ένδειξη είναι «κεφαλή».
Γ: Δύο το πολύ ενδείξεις είναι ίδιες.
Δ: Δύο τουλάχιστον ενδείξεις είναι ίδιες.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.

(i) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης.

(ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων:

Α: Τουλάχιστον μία από τις ενδείξεις είναι άσσος.
Β: Η πρώτη ένδειξη είναι άσσος.
Γ: Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι ίσο με 6.

3. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλλο και τη σειρά γέννησης τους.

(i) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης.

(ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχόμενων:
Α: Τα δύο πρώτα παιδιά είναι αγόρια και το τρίτο κορίτσι
Β: Ένα τουλάχιστον παιδί είναι αγόρι
Γ: Ένα μόνο παιδί είναι κορίτσι
Δ: Το πολύ ένα παιδί είναι κορίτσι.

4. Στο διπλανό πίνακα φαίνεται ο βαθμός που πήραν οι φοιτητές ενός τμήματος στο μάθημα της στατιστικής. Επιλέγουμε στην τύχη έναν φοιτητή, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: Ο φοιτητής έχει βαθμό 3 ή 4.
Β: Ο φοιτητής έχει βαθμό μεγαλύτερο από 6.
Γ: Ο φοιτητής δεν έχει βαθμό 9 ή 10.

Φοιτητές	Βαθμός
8	3
12	4
15	5
20	6
16	7
14	8
10	9
5	10

5. Μια αυτόματη μηχανή παράγει βίδες. Οι βίδες ελέγχονται στη γραμμή παραγωγής και ταξινομούνται σε καλές (κ) και ελαττωματικές (ε). Ο έλεγχος σταματάει αν βρεθούν 2 ελαττωματικές ή 3 καλές βίδες. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: Η πρώτη βίδα είναι καλή.
Β: Η πρώτη βίδα είναι ελαττωματική.
Γ: Η δεύτερη και η τρίτη βίδα είναι καλή.
Δ: Μία το πολύ βίδα είναι ελαττωματική.
Ε: Τουλάχιστον δύο βίδες είναι καλές.

6. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν: $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{4}{5}$.

(i) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

(ii) Αν επιπλέον ισχύει $P(A\cap B)=\frac{3}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
A', B', $A\cup B$, $A'\cup B'$, $A'\cap B'$, $A\cap B'$, $A'\cap B$, $A'\cup B$, $A\cup B'$, $(A-B)\cup(B-A)$.

7. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν: $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cap B')=\frac{1}{6}$. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: A', B', $A\cup B$, $A'\cap B$, $A\cup B'$, $A'\cap B'$ και $A'\cup B'$.

8. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $\frac{P(A)}{P(A')}=2$ και $\frac{P(B)}{P(B')}=\frac{3}{2}$.

(i) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

(ii) Να αποδείξετε ότι: $\frac{4}{15} \le P(A \cap B) \le \frac{3}{5}$.

9. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν: $P(A' \cap B') = \frac{4}{15}$, $P(A \cap B') = \frac{1}{15}$ και $P(A' \cap B) = \frac{1}{5}$.

(i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A, B.

(ii) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

10. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν: $P(A) = \frac{3}{5}$ και $P(B) = \frac{3}{4}$.

(i) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

(ii) Να δείξετε ότι: $\frac{7}{20} \le P(A \cap B) \le \frac{12}{20}$.

11. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν $P(A') \le P(A \cap B)$ και $P(B') \le 0,3$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $P(A) \ge \frac{1}{2}$

(ii) τα ενδεχόμενα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα

(iii) $\frac{P(A')}{P(B)} \le \frac{5}{7}$.

12. Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A') + P(B') = \frac{6}{5}$ και $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cap B$ και $(A - B) \cup (B - A)$.

13. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν: $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B') = \frac{3}{5}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

(i) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

(ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα A, B»

Δ: «Πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A και όχι το B»

E: «Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα A, B».

14. Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος αγγλικά είναι 60%, να γνωρίζει γαλλικά είναι 25% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 15%. Για ένα άτομο πού επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα

(i) Να γνωρίζει αγγλικά ή γαλλικά.

(ii) Να γνωρίζει μόνο αγγλικά ή μόνο γαλλικά.

15. Στο μάθημα της Γεωμετρίας, από τους 30 μαθητές ενός τμήματος, 20 είχαν κανόνα, 12 είχαν διαβήτη και 24 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Για ένα άτομο πού επιλέγεται τυχαία ποια είναι η πιθανότητα

(i) Να έχει κανόνα και διαβήτη.

(ii) Να έχει κανόνα και να μην έχει διαβήτη.

(iii) Να έχει μόνο κανόνα ή μόνο διαβήτη.

16. Από τους 28 μαθητές ενός τμήματος, τα μισά από τα αγόρια και τα μισά από τα κορίτσια έχουν προσωπικό ηλεκτρονικό υπολογιστή (PC). Αν η πιθανότητα να μην έχει ηλεκτρονικό υπολογιστή ένα αγόρι είναι $\frac{3}{14}$, να βρείτε:

(i) Τον αριθμό των αγοριών και των κοριτσιών του τμήματος.

(ii) Την πιθανότητα, στην τυχαία επιλογή ενός μαθητή, του ενδεχομένου Α: «είναι κορίτσι ή έχει ηλεκτρονικό υπολογιστή».

17. Σε μία πόλη το 50% των κατοίκων αγοράζει εφημερίδα, το 30% αγοράζει περιοδικό και το 20% αγοράζει εφημερίδα και περιοδικό. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα:

(i) Να μην αγοράζει ούτε εφημερίδα ούτε περιοδικό.

(ii) Να αγοράζει περιοδικό και να μην αγοράζει εφημερίδα.

(iii) Να αγοράζει μόνο εφημερίδα ή μόνο περιοδικό.

18. Από μία έρευνα που έγινε διαπιστώθηκε ότι το 70% των οδηγών δεν φορά ζώνη ασφαλείας, το 40% των οδηγών δεν έχει πυροσβεστήρα και το 30% των οδηγών δεν φορά ζώνη ασφαλείας και δεν έχει πυροσβεστήρα. Ελέγχουμε τυχαία έναν οδηγό και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Ο οδηγός δεν φορά ζώνη ασφαλείας»

B: «Ο οδηγός δεν έχει πυροσβεστήρα».

Να διατυπώσετε λεκτικά και να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$$A\cup B,\ A'\cap B',\ A\cap B',\ A'\cap B \text{ και } A\cup B'.$$

19. Έστω A, B είναι τα ενδεχόμενα ένας συγκεκριμένος γιατρός να βρίσκεται στις 8 πμ στο ιατρείο του ή στο σπίτι του αντίστοιχα. Αν $P(A)=0,3$ και $P(B)=0,6$, να βρείτε την πιθανότητα στις 8 πμ ο γιατρός να μη βρίσκεται στο ιατρείο ούτε στο σπίτι του.

20. Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B\subseteq \Gamma$. Αν $P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B)=\frac{5}{8}$ και $P(\Gamma)=\frac{7}{8}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

$$P(A\cap B'),\ P(A'\cap B),\ P(A'\cap \Gamma),\ P(B'\cap \Gamma),\ P(A'\cap B'\cap \Gamma').$$

21. Έστω $\Omega=\{1,2,3,...,20\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Έστω επίσης δύο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε:

$$A \cup B = \ 1,2,3,4,6,8,10,11 \ , \ B - A = \ 2,11 \ \text{ και } A \cap B = \ 4,8 \ .$$

(i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B

(ii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A και όχι το B

(iii) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα A και B.

22. Ένα κουτί περιέχει ν μπάλες από τις οποίες οι 18 είναι άσπρες (α) και οι υπόλοιπες είναι κόκκινες (κ) ή πράσινες (π). Επιλέγουμε από το κουτί μια μπάλα στην τύχη. Η πιθανότητα η μπάλα να είναι κόκκινη είναι:

$$P \ \kappa \ = \frac{\nu - 15}{3\nu}$$

Ενώ η πιθανότητα η μπάλα να είναι πράσινη είναι:

$$P \ \kappa \ = \frac{\nu - 6}{2\nu}.$$

(i) Να βρείτε το ν.

(ii) Πόσες κόκκινες και πόσες πράσινες μπάλες υπάρχουν στο κουτί;

(iii) Να βρείτε την πιθανότητα η μπάλα που επιλέξαμε να είναι άσπρη ή πράσινη.

(iv) Να βρείτε την πιθανότητα η μπάλα που επιλέξαμε να είναι κόκκινη αν γνωρίζουμε ότι δεν είναι πράσινη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «Ένα παιδί είναι κορίτσι και δύο παιδιά είναι αγόρια», είναι:

Α. $\frac{1}{4}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. $\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{3}{7}$ Ε. $\frac{4}{7}$

2. Σε μία τάξη το 60% των μαθητών είναι κορίτσια και το 40% είναι αγόρια. Το 30% των κοριτσιών και το 60% των αγοριών έχουν μαύρα μαλλιά. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή. Η πιθανότητα ο μαθητής να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μαλλιά είναι:

Α. $\frac{12}{25}$ Β. $\frac{16}{25}$ Γ. $\frac{23}{50}$ Δ. $\frac{29}{50}$ Ε. $\frac{33}{50}$.

3. Δύο ομάδες A και B παίζουν μεταξύ τους ένα παιχνίδι. Η πιθανότητα να μην χάσει η ομάδα A είναι $\frac{7}{16}$ και η πιθανότητα να μην χάσει η ομάδα B είναι $\frac{3}{4}$. Η πιθανότητα να έρθει το παιχνίδι ισόπαλο είναι:

Α. $\frac{3}{8}$ Β. $\frac{5}{16}$ Γ. $\frac{1}{4}$ Δ. $\frac{3}{16}$ Ε. $\frac{1}{8}$

4. Σε 30 μαθητές ενός σχολείου, 8 μαθητές φορούν γυαλιά και 22 μαθητές δεν φορούν γυαλιά. Οι μισοί από τους μαθητές που φορούν γυαλιά και οι μισοί από τους μαθητές που δεν φορούν γυαλιά έχουν καστανά μάτια. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα ο μαθητής να φορά γυαλιά ή να έχει καστανά μάτια είναι:

Α. $\frac{1}{2}$ Β. $\frac{8}{15}$ Γ. $\frac{17}{30}$ Δ. $\frac{3}{5}$ Ε. $\frac{19}{30}$

5. Από μια τάξη το 50% των μαθητών πέρασαν στα Μαθηματικά, το 60% πέρασαν στη Φυσική και το 10% έμειναν και στα δύο μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Η πιθανότητα ο μαθητής αυτός να έχει μείνει στα Μαθηματικά και να έχει περάσει στη Φυσική είναι:

Α. $\frac{1}{5}$ Β. $\frac{2}{5}$ Γ. $\frac{3}{5}$ Δ. $\frac{4}{5}$ Ε. $\frac{3}{10}$

6. Από 16 άτομα, 8 άτομα ξέρουν Γαλλικά, 9 άτομα δεν ξέρουν Γερμανικά και 2 άτομα δεν ξέρουν ούτε Γαλλικά ούτε Γερμανικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Η πιθανότητα το άτομο αυτό να ξέρει μόνο Γερμανικά είναι:

Α. $\frac{3}{16}$ Β. $\frac{3}{8}$ Γ. $\frac{5}{16}$ Δ. $\frac{1}{8}$ Ε. $\frac{7}{16}$

7. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A)=\frac{5}{8},\ P(B)=\frac{1}{8} \text{ και } P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$$

Η πιθανότητα $P(A\cap B')$ είναι:

Α. $\frac{1}{8}$ Β. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{3}{8}$ Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. $\frac{5}{8}$

8. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A)=\frac{1}{2} \text{ και } P(A'\cap B')=\frac{1}{4}.$$

Η πιθανότητα $P(B')$ είναι:

Α. $\frac{1}{4}$ Β. $\frac{1}{2}$ Γ. $\frac{3}{4}$ Δ. $\frac{5}{6}$ Ε. $\frac{7}{8}$

9. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A)=\frac{1}{3} \text{ και } P(A\cup B)=\frac{13}{21}.$$

Η πιθανότητα $P(B-A)$ είναι:

Α. $\frac{1}{5}$ Β. $\frac{6}{23}$ Γ. $\frac{2}{7}$ Δ. $\frac{4}{7}$ Ε. $\frac{5}{7}$

10. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A)=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{1}{2} \text{ και } P(A\cap B)=\frac{1}{4}.$$

Η πιθανότητα $P(A\cup B)$ είναι:

Α. $\frac{1}{20}$ Β. $\frac{13}{20}$ Γ. $\frac{17}{20}$ Δ. $\frac{19}{20}$ Ε. $\frac{21}{20}$

11. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A)=\frac{1}{2},\ P(B')=\frac{5}{8} \text{ και } P(A\cup B)=\frac{3}{4}.$$

Η πιθανότητα $P(A'\cup B')$ είναι:

Α. $\frac{1}{8}$ Β. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{3}{8}$ Δ. $\frac{1}{2}$ Ε. $\frac{7}{8}$

12. Έστω A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε

$$P(A')=\frac{2}{5},\ P(A\cap B)=\frac{2}{15} \text{ και } P(A'\cap B')=\frac{1}{5}.$$

Η πιθανότητα $P(B)$ είναι:

Α. $\frac{1}{5}$ Β. $\frac{1}{4}$ Γ. $\frac{4}{15}$ Δ. $\frac{1}{3}$ Ε. $\frac{5}{12}$

13. A, B, Γ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε $A\subseteq B\subseteq \Gamma$.

Αν $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B-A)=\frac{5}{24}$ και $P(\Gamma')=\frac{3}{8}$, τότε η πιθανότητα $P(\Gamma\cap B')$ είναι:

Α. $\frac{17}{24}$ Β. $\frac{13}{24}$ Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. $\frac{1}{4}$ Ε. $\frac{1}{8}$.