ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω α, β είναι πραγματικοί αριθμοί. Λέμε ότι **ο αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β**, και γράφουμε $\alpha>\beta$, αν και μόνο αν η διαφορά $\alpha-\beta$ είναι θετικός αριθμός. Δηλαδή

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \text{ θετικός αριθμός.}$$

Αν α είναι πραγματικός αριθμός τότε ισχύουν:

- α θετικός $\Leftrightarrow \alpha>0$ και
- α αρνητικός $\Leftrightarrow \alpha<0$

Επομένως

$$\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0 \text{ και } \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0}$$

Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha>\beta$ ή $\alpha=\beta$, τότε γράφουμε $\alpha\geq\beta$, δηλαδή

$$\boxed{\alpha\geq\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta \text{ ή } \alpha=\beta}$$

Συνέπειες του ορισμού

Έστω α, β είναι πραγματικοί αριθμοί

(i) Αν $\alpha>0$ και $\beta>0$ τότε $\alpha+\beta>0$

(ii) Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$ τότε $\alpha+\beta<0$

(iii) Οι α, β είναι **ομόσημοι** αν και μόνο αν $\alpha\cdot\beta>0$ και $\frac{\alpha}{\beta}>0$

(iv) Οι α, β είναι **ετερόσημοι** αν και μόνο αν $\alpha\cdot\beta<0$ και $\frac{\alpha}{\beta}<0$

(v) Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι

(vi) $\alpha^2\geq 0$, η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

Έστω α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί

1. Αν $\alpha>\beta$ και $\beta>\gamma$ τότε $\alpha>\gamma$

2. Αν $\alpha\geq\beta$ και $\beta\leq\alpha$ τότε $\alpha=\beta$

3. (i) $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$
   (ii) $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma>\beta-\gamma$

4. (i) Αν $\gamma>0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma$

5. (i) αν $\gamma<0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma$

(ii) αν $\gamma<0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$

6. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$,

ΓΕΝΙΚΑ

Αν $\alpha_1>\beta_1$, $\alpha_2>\beta_2$, …, $\alpha_\nu>\beta_\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu$

Προσοχή !!!

Δεν αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

7. Για τους θετικούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$,

ΓΕΝΙΚΑ

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί και $\alpha_1>\beta_1$, $\alpha_2>\beta_2$, …, $\alpha_\nu>\beta_\nu$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdots\alpha_\nu>\beta_1\cdot\beta_2\cdots\beta_\nu$.

Προσοχή !!!

Δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

8. (i) Αν α, β **ομόσημοι** τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

(ii) Αν α, β ετερόσημοι τότε: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$.

Διάταξη και δυνάμεις

9. Για θετικούς αριθμούς α, β και $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύουν:

(i) $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$ και

(ii) $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$.

Μέθοδοι απόδειξης ανισοτήτων

Τις ανισότητες αποδεικνύουμε συνήθως με

1. Την αναλυτική μέθοδο απόδειξης
2. Την συνθετική μέθοδο απόδειξης
3. Τον ορισμό

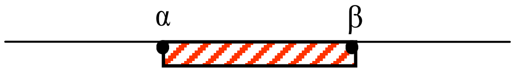
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

Τα διαστήματα είναι **υποσύνολα** του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και έχουν ιδιαίτερη σημασία για την πραγματική ανάλυση.

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$.

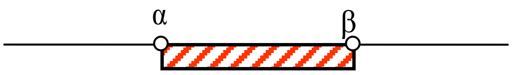
- Κλειστό διάστημα με άκρα τα α και β **συμβολίζεται** α,β **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $\alpha \le x \le \beta$**, δηλαδή**

$[\alpha ,\beta] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \alpha \le x \le \beta\}$



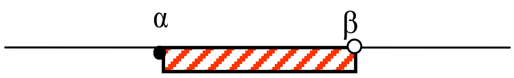
- Ανοιχτό διάστημα με άκρα τα α και β **συμβολίζεται** α,β **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $\alpha < x < \beta$**, δηλαδή**

$\alpha ,\beta = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \alpha \le x \le \beta\}$



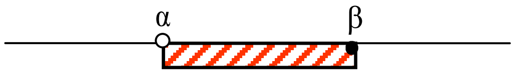
- Διάστημα κλειστό αριστερά, ανοιχτό δεξιά με άκρα τα α και β **συμβολίζεται** α,β **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $\alpha \le x < \beta$**, δηλαδή**

$\alpha,\beta = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \alpha \le x < \beta\}$



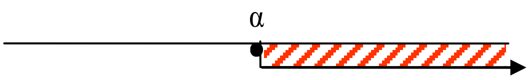
- Διάστημα ανοιχτό αριστερά, κλειστό δεξιά με άκρα τα α και β **συμβολίζεται** α,β **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $\alpha < x \le \beta$**, δηλαδή**

$\alpha,\beta = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \alpha < x \le \beta\}$



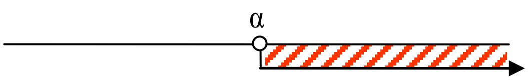
- Διάστημα κλειστό αριστερά με άκρο το α, απέραντο δεξιά **συμβολίζεται** $\alpha,+\infty$ **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $x \ge \alpha$**, δηλαδή**

$\alpha,+\infty = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \ge \alpha\}$

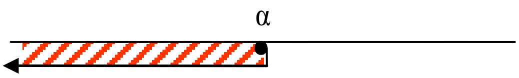


- Διάστημα ανοιχτό αριστερά με άκρο το α, απέραντο δεξιά **συμβολίζεται** $\alpha,+\infty$ **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $x > \alpha$**, δηλαδή**

$\alpha,+\infty = \{x \in \mathbb{R} \ /x > \alpha\}$

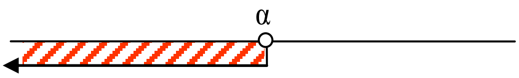


● Διάστημα κλειστό δεξιά με άκρο το α, απέραντο αριστερά **συμβολίζεται** $-\infty, \alpha$ **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $x \leq \alpha$**, δηλαδή**



● Διάστημα ανοιχτό δεξιά με άκρο το α, απέραντο αριστερά **συμβολίζεται** $-\infty, \alpha$ **, λέγεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών** x **για τους οποίους ισχύει:** $x < \alpha$**, δηλαδή**

$-\infty, \alpha \ = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < \alpha\}$



● Διάστημα απέραντο αριστερά και δεξιά **συμβολίζεται** $-\infty, +\infty$ **, λέγεται το σύνολο** $\mathbb{R}$ **των πραγματικών αριθμών** x**, δηλαδή**

$$-\infty, +\infty \ \equiv \mathbb{R}.$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Οι παρακάτω ανισότητες χρησιμοποιούνται για την απόδειξη άλλων ανισοτήτων

1. (i) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ **(ii)** $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ **(iii)** $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

2. (i) Αν $\alpha > 0$**, τότε** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$ **(ii) Αν** $\alpha < 0$**, τότε** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \leq -2$

3. (i) αν α, β ομόσημοι τότε $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \geq 2$ **(ii) αν α, β ετερόσημοι τότε** $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} \leq -2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν $x^2 < x$ και $\psi < 0$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $0 < x < 1$ Β. $x \cdot \psi < 0$ Γ. $1 < \frac{1}{x}$ Δ. $x \cdot \psi < \psi$ Ε. $\frac{x}{\psi} > \frac{1}{x \cdot \psi}$

2. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha - \beta < 0$, $\alpha \cdot \gamma^5 < 0$ και $\alpha \cdot \beta^2 > 0$, ποιό από τα παρακάτω είναι αρνητικό;

Α. $\alpha + \beta + \gamma^2$ Β. $\alpha^2 + \beta^4 \cdot \gamma$ Γ. $\frac{\alpha^3 \cdot \beta^2}{\gamma^5}$ Δ. $\frac{\gamma^2}{\alpha \cdot \beta}$ Ε. $\alpha^2 + \beta + \gamma^3$

3. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\beta \cdot \gamma > \alpha \cdot \gamma$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha\beta > 0$ Β. $\alpha\beta < 0$ Γ. $\frac{\alpha - \beta}{\gamma} > 0$ Δ. $\frac{\alpha - \beta}{\gamma} < 0$ Ε. $\alpha^2 < \beta^2$

4. Ποιός από τους παρακάτω αριθμούς είναι πλησιέστερος στον $\frac{4}{7}$

Α. $\frac{13}{21}$ Β. $\frac{5}{6}$ Γ. $\frac{2}{3}$ Δ. $\frac{5}{7}$ Ε. $\frac{19}{42}$

5. Αν $0 < x < \psi < 1$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $\frac{1}{x} > \frac{1}{\psi}$ Β. $0 < \frac{x}{\psi} < 1$ Γ. $\frac{1}{\psi} - \frac{1}{x} < 0$ Δ. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} > 2$ Ε. $\frac{1}{x\psi} < 1$

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha^5 \cdot \beta^{2\nu+2} < 0$ και $\beta^3 \cdot \gamma^{2\nu} > 0$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha > 0,\ \beta > 0, \gamma \neq 0$ Β. $\alpha < 0,\ \beta > 0, \gamma \neq 0$ Γ. $\alpha > 0,\ \beta > 0$
Δ. $\alpha < 0, \gamma > 0$ Ε. $\alpha < \beta < \gamma$

7. Αν $x, \psi, z \in \mathbb{R}$ με $x^2 \cdot \psi < 0$, $x^3 \cdot \psi \cdot z^3 > 0$ και $x \cdot z^2 > 0$, ποιό από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $x + z < 0$ Β. $x \cdot \psi < 0$ Γ. $\psi \cdot z > 0$ Δ. $\frac{x}{z} > 0$ Ε. $x + \psi < 0$

8. Αν $x, \psi, z \in \mathbb{R}$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $3x = 4\psi$ και $x = 3z$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $x < \psi < z$ Β. $x < z < \psi$ Γ. $\psi < x < z$ Δ. $\psi < z < x$ Ε. $z < x < \psi$

9. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $-\beta + 2\alpha = 0$ και $3\beta = 2\gamma$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha < \beta < \gamma$ Β. $\beta < \alpha < \gamma$ Γ. $\alpha < \gamma < \beta$ Δ. $\gamma < \alpha < \beta$ Ε. $\gamma < \beta < \alpha$

10. Αν $3 < x < 6$ και $4 < \psi < 10$, πόσες ακέραιες τιμές παίρνει η παράσταση $2x - 4\psi$;

Α. 29 Β. 30 Γ. 31 Δ. 32 Ε. 33

11. Αν $\beta = \dfrac{3 + \frac{1}{\alpha}}{\alpha + \frac{1}{3}}$ και $\dfrac{3}{10} < \beta < 1$, ποιό από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $2 < \alpha < 9$ Β. $3 < \alpha < 10$ Γ. $\alpha = 4$ Δ. $\dfrac{3}{10} < \alpha < 2$ Ε. $4 < \alpha < 6$

12. Αν x, ψ είναι ακέραιοι, $-5 < x < -1$ και $-7 < \psi < -2$, τότε η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\dfrac{x + \psi}{\psi - x}$ είναι

Α. 3 Β. 5 Γ. 7 Δ. 9 Ε. 11

13. Αν $x^4 < x^2$ και $x^3 < x^5$, τότε το x παίρνει τιμές στο διάστημα

Α. $-1, 0$ Β. $0, 1$ Γ. $-\infty, 1$ Δ. $1, +\infty$ Ε. $0, +\infty$

14. Αν $0 < x < \psi$ και $z = \dfrac{x + 3\psi}{\psi}$, ποιο από τα παρακάτω εκθέματα είναι αληθές ;

Α. $z = 3$ Β. $z = 2$ Γ. $0 < z < 3$ Δ. $3 < z < 4$ Ε. $4 < z < 5$

15. Αν $4 < x < \psi$, $\alpha = \dfrac{\psi}{x}$, $\beta = \dfrac{\psi}{4}$ και $\gamma = \dfrac{4}{x}$ ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\gamma < \beta < \alpha$ Β. $\gamma < \alpha < \beta$ Γ. $\beta < \alpha < \gamma$ Δ. $\beta < \gamma < \alpha$ Ε. $\alpha < \beta < \gamma$

16. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $4x^2 - 12x + 19$ είναι

Α. 19 Β. 12 Γ. 10 Δ. 9 Ε. 4

17. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta < 1$ και $5\alpha + 4\beta > 7$, τότε η μικρότερη ακεραία τιμή που μπορεί να πάρει το $\alpha + \beta$ είναι:

Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 2 Ε. 1

18. Αν α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha^2 \cdot \beta < 0$, $\alpha \cdot \beta^4 > 0$ και $\dfrac{\alpha^3}{\gamma} < 0$, τότε το πρόσημο των α, β, γ αντίστοιχα είναι

Α. $-$, $+$, $+$ Β. $-$, $-$, $+$ Γ. $+$, $-$, $+$ Δ. $+$, $-$, $-$ Ε. $+$, $+$, $-$

19. Αν x, ψ, $z \in \mathbb{R}$ με $x^6 \cdot \psi = -2$, $\psi \cdot z = 3$ και $\dfrac{1}{x} > 0$, τότε το πρόσημο των x, ψ, z αντίστοιχα είναι

Α. $+$, $+$, $+$ Β. $-$, $-$, $-$ Γ. $+$, $-$, $-$ Δ. $+$, $-$, $+$ Ε. $-$, $+$, $+$

20. Αν α, β, γ αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $\frac{\alpha}{5} = \frac{\beta}{6} = \frac{\gamma}{7}$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha < \beta < \gamma$ Β. $\alpha < \gamma < \beta$ Γ. $\gamma < \alpha < \beta$ Δ. $\gamma < \beta < \alpha$ Ε. $\beta < \alpha < \gamma$

21. Αν $x < \psi < -2$, $\alpha = \frac{x}{\psi}$, $\beta = \frac{-2}{\psi}$ και $\gamma = \frac{x}{-2}$ ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha < \beta < \gamma$ Β. $\beta < \alpha < \gamma$ Γ. $\beta < \gamma < \alpha$ Δ. $\alpha < \gamma < \beta$ Ε. $\gamma < \alpha < \beta$

22. Αν x, ψ, z είναι μη μηδενικοί ακέραιοι και ισχύουν $x^2 \cdot \psi < 0$, $\psi^2 \cdot z > 0$, $5x = 3\psi$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $x < z < \psi$ Β. $x < \psi < z$ Γ. $\psi < z < x$ Δ. $\psi < x < z$ Ε. $z < \psi < x$

23. Αν x, ψ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν $x^4 < x^3$, $x \cdot \psi > \psi$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $0 < \psi < 1$ Β. $1 < \psi < 2$ Γ. $\psi = 0$ Δ. $\psi > 2$ Ε. $\psi < 0$

24. Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\gamma < -\gamma$, $\beta\gamma < 0$ και $\alpha = 2\gamma$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;
Α. $\alpha < \beta < \gamma$ Β. $\beta < \alpha < \gamma$ Γ. $\beta < \gamma < \alpha$ Δ. $\alpha < \gamma < \beta$ Ε. $\gamma < \alpha < \beta$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Απόδειξη ανισοτήτων

25. Να αποδείξετε ότι:
(i) Αν $x > 2$, τότε $x^3 > x^2 + x + 2$ (ii) Αν $\alpha > -1$, τότε : $\alpha^3 + 1 \geq \alpha^2 + \alpha$
(iii) Αν $x \geq 0$ και $\psi \geq 0$, τότε : $x^5 + \psi^5 \geq x^4\psi + x\psi^4$

26. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
(i) $\alpha + \beta\ ^2 \geq 4\alpha\beta$ (ii) $\alpha + \beta\ ^2 \geq 3\alpha\beta$

27. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
(i) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ (ii) $\alpha + \beta + \gamma\ ^2 \leq 3\ \ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

28. Να αποδείξετε ότι:
(i) $\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^4} \leq \frac{1}{2}$ (ii) $\alpha^4 + \beta^4 \geq \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$

29. Να αποδείξετε ότι:
(i) $x^4\psi^2 + x^4 + \psi^2 + 1 \geq 4x^2\psi$ (ii) $1 + 2\alpha^4 \geq \alpha^2 + 2\alpha^3$

30. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\alpha<0$, τότε $\frac{\alpha}{3}+\frac{3}{\alpha}\le -2$ (ii) Αν $x>2$, τότε $\frac{8}{x^2}-\frac{x}{4}<\frac{3}{2}$

31. Αν $2\alpha+4\beta=1$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+\beta^2\ge\frac{1}{20}$

32. Για τους πραγματικούς αριθμούς x , ψ , z δίνεται ότι $x+\psi+z=\alpha$.Να αποδείξετε ότι:

(i) $x^2+\psi^2+z^2\ge\frac{\alpha^2}{3}$ (ii) $x\psi+\psi z+zx\le\frac{\alpha^2}{3}$

33. Αν α, β θετικοί αριθμοί και $\alpha+\beta=1$ να αποδειχθεί ότι:

(i) $\alpha\beta\le\frac{1}{4}$ (ii) $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\ge 9$ (iii) $\alpha^4+\beta^4\ge\frac{1}{8}$

34. Να αποδείξετε ότι:

(i) Αν $\alpha\ne 2$ τότε $\frac{1}{\alpha^2-4\alpha+4}>\frac{2}{\alpha^3-8}$ (ii) Αν $\alpha+\beta=2$ τότε $\alpha^4+\beta^4\ge 2$.

35. Αν $\alpha+\beta\ge 0$, να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^3+\beta^3\ge\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ (ii) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2}\ge\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

36. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha+\beta\ +\ \alpha\beta+1\ \ge 4\alpha\beta$, πότε ισχύει η ισότητα;

(ii) $2\alpha+\beta\ ^3\ge 27\alpha^2\beta$

37. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha^4+\beta^4\quad \alpha^5+\beta^5\ \le 2\ \alpha^9+\beta^9$ (ii) $\alpha^8-\alpha^5+\alpha^2-\alpha+1>0$

Πράξεις με ανισότητες

38. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$ (ii) $\alpha<\frac{4\alpha+3\beta+5\gamma}{12}<\gamma$

39. Αν $-3<x<2$ και $-1<\psi<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

(i) $-3x$ (ii) $2x+5\psi$ (ii) $4x-2\psi$ (iii) $3x-2\psi+5$

40. Αν $3<\alpha<5$ και $1<\beta<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

(i) $\frac{\alpha}{\beta}$ (ii) $\alpha-1 \quad \beta+1$ (iii) $3\alpha^2+4\beta^2$ (iv) $\frac{4\alpha}{3\beta+1}$

41. Αν $2<\alpha<6$ και $-5<\beta<-3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:
(i) $2\alpha-3\beta$ (ii) $\frac{6}{\alpha}-\frac{30}{\beta}$ (iii) $2\alpha^2+\beta^2$ (iv) $\frac{15\alpha}{3\beta+1}$

Συμπλήρωση τετραγώνου

42. Να αποδείξετε ότι:
(i) $\alpha^2+\beta^2+5\geq 2\ \ 2\alpha+\beta$ (ii) $\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta+\beta+1>0$

43. Να αποδείξετε ότι:
(i) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3\geq 2\ \ \alpha+\beta+\gamma$ (ii) $\alpha^2+4\beta^2+3\gamma^2+14>2\alpha-12\beta+6\gamma$

44. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$
(i) $x^2-2x+2>0$ (ii) $2x^2+3x+5>0$ (iii) $3x^2-4x+2>0$

45. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των παρακάτω πολυωνύμων (τριωνύμων) και την τιμή του x για την οποία το πολυώνυμο παίρνει ελάχιστη τιμή
(i) $P\ \ x\ \ =x^2-x+1$ (ii) $Q\ \ x\ \ =16x^2-40x+25$
(iii) $R\ \ x\ \ =2x^2+3x-5$

46. Να βρείτε την μέγιστη τιμή των παρακάτω πολυωνύμων (τριωνύμων) και την τιμή του x για την οποία το πολυώνυμο παίρνει μέγιστη τιμή
(i) $P\ \ x\ \ =-x^2+2x-5$ (ii) $P\ \ x\ \ =-x^2+x+2$
(iii) $P\ \ x\ \ =-9x^2-4x-1$

47. Να αποδείξετε ότι:
(i) $x^4+2x^3+\psi^4-4\psi^3+x^2+4\psi^2\geq 0$ για κάθε $x,\ \psi\in\mathbb{R}$
(ii) $2x^2+2x\psi+\psi^2+2x+1\geq 0$ για κάθε $x,\ \psi\in\mathbb{R}$

48. Να αποδείξετε ότι:
(i) $x^2+2x\psi+3\psi^2+2x+6\psi+4\geq 0$ (ii) $x^2+5\psi^2-4x\psi+2x-6\psi+3>0$

Σύγκριση αριθμών

49. Αν $\alpha>\beta>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^3-\beta^3$ και $\alpha-\beta\ \ ^3$

50. Αν $\alpha>\beta>0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha+\beta}$ και $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-\beta}$.

51. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

(i) 2^{300} και 3^{150} (ii) 4^{140} και 5^{120} (iii) $0,28^{\ 50}$ και $0,42^{\ 30}$.

Ανισοτικές σχέσεις στην Γεωμετρία

52. Αποδείξτε ότι κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το μισό της περιμέτρου του τριγώνου.

53. Αν α, β, γ είναι τα μέτρα τα μέτρα των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\ \ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$$

54. Να αποδείξετε ότι: το άθροισμα μιας πλευράς τριγώνου και του ύψους που αντιστοιχεί στην πλευρά αυτή είναι μεγαλύτερο από την ημιπερίμετρο του τριγώνου.

55. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα α να δείξετε ότι:

$$\beta^3+\gamma^3<\alpha^3$$

56. Με την βοήθεια της ταυτότητας $4\alpha\beta=\ \alpha+\beta^{\ 2}-\ \alpha-\beta^{\ 2}$ να αποδείξετε ότι: από όλα τα ορθογώνια που έχουν σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν

57. Αν α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\ \ \alpha+\beta}{\gamma}>3$ (ii) $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right)\ \beta+\gamma\ >5$

Γενικές

58. Αν $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $\alpha^5-\alpha^3+\alpha=3$, να αποδείξετε ότι $\alpha^6\geq5$.

59. Αν α, β θετικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha+\beta^2<\alpha^2$, να αποδείξετε ότι $\alpha-\beta>\dfrac{1}{2}$.

60. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha+\beta\geq0$, $\alpha\neq0$ και $\beta\neq0$, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}\geq\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

61. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha<\beta<\gamma$, τότε $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha<\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$

62. Αν α, β, γ, δ είναι μη αρνητικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4\geq4\alpha\beta\gamma\delta$$

63. Αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha\gamma}{\beta}+\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\geq\alpha+\beta+\gamma$ (ii) $\alpha+\beta\quad\beta+\gamma\quad\gamma+\alpha\ \geq8\alpha\beta\gamma$

64. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε

$$1-\alpha \;\cdot\; 1-\beta \;\cdot\; 1-\gamma \;\geq 8\alpha\beta\gamma$$

65. Να αποδείξετε ότι: αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ και $\alpha+\beta+\gamma=1$, τότε

$$\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\beta}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\geq 8.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3
(ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ $\mathbb{R}$)

ΘΕΜΑ 1°

Α. 1. Πότε λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος από τον πραγματικό αριθμό β ;

2. Να αποδείξετε ότι: για θετικούς αριθμούς α, β και $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν:

(i) $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$ και

(ii) $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$.

Β. Να χαρακτηρίσετε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν οι αριθμοί α , β είναι ετερόσημοι, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}$

2. Αν $\alpha<\beta<0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\alpha^\nu>\beta^\nu$

3. Αν $0<\alpha<1$ και $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}^*$, τότε $\mu<\nu \Leftrightarrow \alpha^\mu>\alpha^\nu$

Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν α,β,γ αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί και $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{6}=\frac{\gamma}{7}$, ποιο από τα παρακάτω είναι αληθές ;

Α. $\alpha<\beta<\gamma$ Β. $\alpha<\gamma<\beta$ Γ. $\gamma<\alpha<\beta$ Δ. $\gamma<\beta<\alpha$ Ε. $\beta<\alpha<\gamma$

2. Αν α, β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ και $\beta-\frac{\alpha}{3}<0$, ποιο από τα παρακάτω είναι πάντοτε αληθές ;

Α. $\alpha>0$ Β. $\beta>0$ Γ. $\alpha+\beta>0$ Δ. $\alpha^2<\beta^2$ Ε. $\alpha\cdot\beta>0$

3. Αν $0<x<\psi<1$, ποιο από τα παρακάτω είναι λάθος ;

Α. $\frac{1}{x}>\frac{1}{\psi}$ Β. $0<\frac{x}{\psi}<1$ Γ. $\frac{1}{\psi}-\frac{1}{x}<0$ Δ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}>2$ Ε. $\frac{1}{x\psi}<1$

ΘΕΜΑ 2° Α. Να βρείτε τους $x,\ \psi,\ z \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι:

$$x^2+4\psi^2+4z^2-6x+4\psi+40z+110 \leq 0$$

Β. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι: $\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha<\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\beta$.

ΘΕΜΑ 3ο Α. Αν $-1\le\alpha\le 3$ και $-2\le\beta\le 1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παραστάσεις:

$$A=2\alpha+3\beta,\ B=5\alpha-3\beta,\ \Gamma=(\alpha+2)(\beta+3)\ \text{ και }\ \Delta=\frac{\alpha+3}{\beta+4}-7.$$

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του πολυωνύμου $P(x)=3x^2-2x-9$.

ΘΕΜΑ 4ο Α. Αν $\alpha,\ \beta$ είναι θετικοί αριθμοί να αποδείξετε ότι:

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\ge 2$

(ii) $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)\ge 6\alpha\beta\gamma$.